Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(2x+3)=5+(2x+7)$	**2p**
	$x=3$	**3p**
2.	$\Delta=(m-1)^2+4m=$	**2p**
	$=(m+1)^2\geq 0$, deci, pentru orice număr real m, graficul funcției f intersectează axa Ox	**3p**
3.	$2-x=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0$	**2p**
	$x_1=-\frac{1}{4}$, care nu verifică ecuația, și $x_2=1$, care verifică ecuația	**3p**
4.	Elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ care verifică relaţia $5^{n-1}>(n+1)!$ sunt 3 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	Mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{5}$	**2p**
5.	$a+(2a+1)\cdot(-2)-4=0 \Leftrightarrow a=-2$	**3p**
	$3\cdot(-2)+b\cdot(-2)-8=0 \Leftrightarrow b=-7$	**2p**
6.	$\sin 2x=2\sin x\cos x$	**2p**
	$1+\cos 2x=2\cos^2 x \Rightarrow \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D\left(2,\frac{1}{2}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0$, deoarece determinantul are două linii egale	**3p**
b)	$D(x,y)=\begin{vmatrix}0 & x-\frac{1}{2} & \frac{1}{x}-2\\ 0 & y-\frac{1}{2} & \frac{1}{y}-2\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{y}-2\right)-\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)=-\frac{1}{2xy}(2x-1)(2y-1)(x-y)$	**3p**

c)	$\left(2\log_2 x-1\right)\left(2\cdot 2-1\right)\left(\log_2 x-2\right)=0$	**3p**
	$x=\sqrt{2}$ sau $x=4$, care verifică ecuația	**2p**
2.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$, $A(-1)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(1)-A(-1)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}=A(3)$	**3p**
b)	$A(a)+bI_2=\begin{pmatrix}1+b&2&a\\a&1+b&2\\2&a&1+b\end{pmatrix}$, $A(1)-I_3=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$, $\left(A(1)-I_3\right)\left(A(1)-I_3\right)=\begin{pmatrix}4&1&4\\4&4&1\\1&4&4\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+b&2&a\\a&1+b&2\\2&a&1+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&2&8\\8&8&2\\2&8&8\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=8,\ b=7$	**2p**
c)	$\det\left(A(n)\right)=\begin{vmatrix}1&2&n\\n&1&2\\2&n&1\end{vmatrix}=(n+3)\left(n^2-3n+3\right)$	**3p**
	Ecuaţia $\det\left(A(n)\right)=0$ nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale, deci matricea $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
b)	$a_{n+1}-a_n=f(n+1)=$	**2p**
	$=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător	**3p**
c)	$a_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)\left(\ln(n+1)-\ln n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{2n+1}{n}}=\ln e^2=2$	**3p**
2.a)	f este continuă în $x=1\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}f(x)=f(1)$	**2p**
	$a+3=1+a^2\Leftrightarrow a^2-a-2=0\Leftrightarrow a_1=-1$ și $a_2=2$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+4x+x}\right)=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5x}}=-\frac{1}{2}$	**3p**
c)	$g:[-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+2^x=2x+2^x$	**2p**
	Cum g este continuă pe $[-1,0]$, $g(-1)=-\frac{3}{2}<0$ și $g(0)=1>0$, ecuația $f(x)+2^x=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-1,0]$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_{2016} 63 + \log_{2016} 32 + \sqrt{0,0625} = \log_{2016} 2016 + 0,25 =$	**3p**
	$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$	**2p**
2.	$x_1 + x_2 = 3m - 4$, $x_1 x_2 = m - 3$	**2p**
	$3m - 4 = 2m - 6 \Leftrightarrow m = -2$	**3p**
3.	$2^x\left(2 + 2^x - 4^x\right) = 0 \Leftrightarrow 2^x\left(2 - 2^x\right)\left(1 + 2^x\right) = 0$	**3p**
	Deoarece $2^x > 0$, soluția ecuației este $x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ are 10 elemente, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 10	**1p**
	1 este singurul element al mulțimii $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ care verifică relația $f(n) = 0$, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 1	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{10}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$	**2p**
	$BC = 18$	**3p**
6.	$1 + 2\sin a \cos a = 1 + 2\sin b \cos b \Rightarrow \sin 2a = \sin 2b$	**2p**
	Cum $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a \neq b$, obținem $2a = \pi - 2b$, adică $a + b = \frac{\pi}{2}$, deci $\sin(a + b) = 1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta(-1,0) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 - 3 - 0 =$	**3p**
	$= -5$	**2p**
b)	$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x - y & 3 - y & y \\ x^2 - y^2 & 2 - y^2 & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x - y)\begin{vmatrix} 1 & 3 - y \\ x + y & 2 - y^2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= (x - y)\left(2 - y^2 - 3x + xy - 3y + y^2\right) = (x - y)(xy - 3x - 3y + 2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$xy - 3x - 3y + 2 = -8 \Leftrightarrow (x - 3)(y - 3) = -1$	**3p**
	Cum x și y sunt numere întregi distincte, obținem $x = 4$, $y = 2$ sau $x = 2$, $y = 4$	**2p**

2.a)	$A(1)-A(0)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$	**2p**
	Inversa matricei $A(1)$ este matricea $\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$\begin{pmatrix}1&2^{n+1}&2\cdot 3^n+2^{2n}\\0&1&2^{n+1}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^p&3^p\\0&1&2^p\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$2^{n+1}=2^p \Leftrightarrow n+1=p$	**1p**
	$2\cdot 3^n+2^{2n}=3^{n+1}\Leftrightarrow 2^{2n}=3^n$, deci $n=0$ și $p=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\ln 2$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=\ln 2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
b)	$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{2n+3}{n+1}-\ln\frac{2n+1}{n}=\ln\frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1}<\ln 1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**3p**
	$x_{n+1}-x_n<0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător	**2p**
c)	$x_n\leq x_1=\ln 3$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**2p**
	$x_n=\ln\frac{2n+1}{n}=\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)>\ln 2$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**3p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-8x+7}{x^2-4x+3}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=1$	**3p**
b)	f este continuă în $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=f(1)$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\frac{x-7}{x-3}=3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\left(\sqrt{x^2+4x-4}+a\right)=1+a$, $f(1)=1+a$	**3p**
	$3=1+a\Leftrightarrow a=2$	**1p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\frac{\ln\sqrt{x^2+4x-4}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\ln\left(x^2+4x-4\right)^{\frac{1}{2(x-1)}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\ln\left(\left(1+x^2+4x-5\right)^{\frac{1}{x^2+4x-5}}\right)^{\frac{(x-1)(x+5)}{2(x-1)}}=$	**3p**
	$=\ln e^3=3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}=(4-i)(4+i)-(4-i)-(4+i)=$	**2p**
	$=4^2-i^2-8=9$	**3p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4\left(m^2-m+2\right)=8m-7$	**2p**
	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 8m-7=0 \Leftrightarrow m=\frac{7}{8}$	**3p**
3.	$3\log_x 5+\log_5(5x)=5 \Rightarrow \frac{3}{\log_5 x}+\log_5 5+\log_5 x=5 \Rightarrow (\log_5 x-1)(\log_5 x-3)=0$	**3p**
	$x=5$ sau $x=125$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 900	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre, care sunt multipli de 11, sunt $10\cdot 11, 11\cdot 11, \ldots, 90\cdot 11$, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 81	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{81}{900}=\frac{9}{100}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$\sin^2 x+6\sin x\cos y+9\cos^2 y+\cos^2 x-6\cos x\sin y+9\sin^2 y=10 \Leftrightarrow 6\sin(x-y)=0$	**3p**
	$x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x-y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, deci obținem $x-y=0$, adică $x=y$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta(0,2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 6 & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+6+0-0-2-12=-2$	**3p**
b)	$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-1 & y-1 & 2\\ x^2+x-2 & y^2+y-2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-1 & y-1 & 2\\ (x-1)(x+2) & (y-1)(y+2) & 2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(x-1)(y-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ x+2 & y+2\end{vmatrix}=(x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$\Delta(m,n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & n+1 & 2\\ m^2+m & n^2+n & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & n+1 & 2\\ m(m+1) & n(n+1) & 2\end{vmatrix}$	**1p**
	Cum numerele m și n sunt întregi, numerele $m(m+1)$ și $n(n+1)$ sunt divizibile cu 2, deci există numerele întregi k și l astfel încât $m(m+1)=2k$ și $n(n+1)=2l$	**2p**
	$\Delta(m,n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & n+1 & 2\\ 2k & 2l & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & n+1 & 2\\ k & l & 1\end{vmatrix}$, deci numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2	**2p**
2.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(0)+A(2)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}a & 0 & a-1\\ 0 & 1 & 0\\ a-1 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 0 & b-1\\ 0 & 1 & 0\\ b-1 & 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ab-a-b+1 & 0 & 2ab-a-b\\ 0 & 1 & 0\\ 2ab-a-b & 0 & 2ab-a-b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2ab-a-b+1 & 0 & (2ab-a-b+1)-1\\ 0 & 1 & 0\\ (2ab-a-b+1)-1 & 0 & 2ab-a-b+1\end{pmatrix}=A(2ab-a-b+1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{2}\right)A(a)=A\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot a-\frac{1}{2}-a+1\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru a număr real	**2p**
	$A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=\left(A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=$ $=\left(A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=\ldots=A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{2017}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{x^3(x+1)^3}=\frac{(x+1)^3-x^3}{x^3(x+1)^3}=$	**3p**
	$=\frac{(x+1)^3}{x^3(x+1)^3}-\frac{x^3}{x^3(x+1)^3}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**

c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^{2n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{(n+1)^3}\right)^{\frac{(n+1)^3}{-1}}\right)^{\frac{-2n^3}{(n+1)^3}}=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^3}{(n+1)^3}}=\frac{1}{e^2}$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2-x+a}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)}{x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)=1$	**2p**
b)	f este continuă în $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=f(0)$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(x^3+3x^2-x+a\right)=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\left(e^x+1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+e^x+1}=\frac{4}{3}$, $f(0)=a$	**3p**
	$a=\frac{4}{3}$	**1p**
c)	Pentru $a\in(-6,-3)$, avem $f(-3)=3+a<0$, $f(-1)=3+a<0$ și $f(-2)=6+a>0$	**3p**
	Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$, deci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție reală în intervalul $(-3,-2)$ și cel puțin o soluție reală în intervalul $(-2,-1)$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a-ib)+i(a+ib)=4+5i \Leftrightarrow (2a-b)+i(a-2b)=4+5i$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=1$, $b=-2$, deci $z=1-2i$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=3-2(3-2x)=4x-3$	**2p**
	$4x-3<x \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)$	**3p**
3.	$3^{x^2+1}\cdot 3^1=3^3 \Leftrightarrow x^2+2=3$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are C_6^2 submulțimi cu două elemente, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 15	**1p**
	Mulțimea A are C_3^2 submulțimi cu două elemente care conțin numai numere pare, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 3	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, deci $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$	**3p**
	$AM=4\sqrt{2}$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{2\pi}{3}=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-2)=\begin{pmatrix}2&6&1\\6&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(-2))=\begin{vmatrix}2&6&1\\6&2&1\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+0+0-0-0-36=-32$	**3p**
b)	$\det(A(x)-xI_3)=\begin{vmatrix}x^2&x^2-x&1\\x^2-x&x^2&1\\0&0&1-x\end{vmatrix}=x^2(1-x)(2x-1)$	**3p**
	$x^2(1-x)(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\cup\{0\}$	**2p**

c)	$\Delta=\begin{vmatrix} a^2+a & a^2-a & 1 \\ a^2-a & a^2+a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4a^3$	**2p**
	Pentru orice a număr real nenul, obținem $\Delta\neq 0$, deci punctele P_a, P_{-a} și O **nu** sunt coliniare	**3p**
2.a)	$M(x)\cdot M(-x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 2^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x+x \\ 0 & 2^x\cdot 2^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=M(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$M(x)\cdot M(-x)=M(-x)\cdot M(x)=I_3$, pentru orice număr real x	**3p**
	Inversa matricei $M(x)$ este matricea $M(-x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 2^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$M(1)+M(2)+\ldots+M(n)=\begin{pmatrix} n & 0 & 1+2+\ldots+n \\ 0 & 2^1+2^2+\ldots+2^n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(M(1)+M(2)+\ldots+M(n)\right)=\begin{vmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 2\left(2^n-1\right) & 0 \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix}=2n^2\left(2^n-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{(x+1)^2}=2$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n+1)=1-\frac{1}{n^2+4n+4}<1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum $a_n>0$ pentru orice număr natural nenul n, obținem $a_{n+1}<a_n$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător	**2p**

2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{3x-2-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{3}{(x+1)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}=\frac{3}{4}$	**2p**
b)	Pentru orice număr real m, funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(2^x+\sin(x-1)+m\right)=2+m$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\frac{3}{4}$ și $f(1)=2+m$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow m=-\frac{5}{4}$	**3p**
c)	$f(0)=-\frac{1}{4}-\sin 1$, $f(2)=\frac{1}{3}$	**2p**
	f este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f(0)\cdot f(2)<0$, deci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,2)$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**B**	**5p**
2.	**A**	**5p**
3.	**C**	**5p**
4.	**D**	**5p**
5.	**A**	**5p**
6.	**A**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(0,1)=\begin{vmatrix}0&2&1\\0&0&1\\2&3&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+4-0-0-0=4$	**3p**
b)	$D(a,1)=\begin{vmatrix}a&2&1\\a&a&1\\2&3&1\end{vmatrix}=a^2-4a+4=$	**3p**
	$=(a-2)^2\geq 0$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$D(m,n)=m^2+m+4n^2-5mn$, unde m și n sunt numere întregi impare	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi impare, m^2 este impar, $4n^2$ este par și $5mn$ este impar, deci numărul întreg $D(m,n)$ este impar, de unde obținem că $D(m,n)\neq 0$	**3p**
2.a)	$A(-x)+A(x)=\begin{pmatrix}-x&1&x\\1&0&1\\x&1&-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&1&-x\\1&0&1\\-x&1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2xy+1&0&-2xy+1\\0&2&0\\-2xy+1&0&2xy+1\end{pmatrix}$, $A(2xy)=\begin{pmatrix}2xy&1&-2xy\\1&0&1\\-2xy&1&2xy\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

	$A(x)A(y)-A(2xy)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\big(A(x)A(y)-A(2xy)\big)=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(x)A\left(\dfrac{1}{2x}\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I_3$, pentru orice număr real nenul x	**3p**
	$\underbrace{2I_3+2I_3+\ldots+2I_3}_{\text{de 2019 ori } 2I_3}=4038I_3$, deci $m=4038$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=1$	**2p**
b)	$a_n=\dfrac{n+1}{n+2}$, deci $a_n>0$, pentru orice număr natural n, $n\geq1$	**2p**
	Cum $a_n=1-\dfrac{1}{n+2}<1$, pentru orice număr natural n, $n\geq1$, șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este mărginit	**3p**
c)	**c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt{f(n)}-1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(f(n)-1\right)}{\sqrt{f(n)}+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)}{\sqrt{f(n)}+1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{(n+2)\left(\sqrt{f(n)}+1\right)}=-\dfrac{1}{2}$	**3p**
2.a)	Pentru orice număr real a, funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(a+\dfrac{\sin x}{x}\right)=a+1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x^2+2x}=0$ și $f(0)=0$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow a=-1$	**3p**
b)	$a=1\Rightarrow f(x)=1+\dfrac{\sin x}{x}$, $x\in(-\infty,0)$	**1p**
	$\left\lvert\dfrac{\sin x}{x}\right\rvert\leq\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\lvert x\rvert}=0$	**2p**
	Obținem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, deci dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $[0,+\infty)$, deci mulțimea valorilor funcției f conține intervalul $[0,+\infty)$	**3p**
	Cum pentru orice număr real a, $\lvert a\rvert\in[0,+\infty)$, ecuația $f(x)=\lvert a\rvert$ are cel puțin o soluție	**2p**